$$\sum_{n=!}^{\infty} \frac{1}{n}$$

Sea $b_n = \frac{1}{n}$

Vemos que

i) $f(x) = \frac{1}{x}$,entonces $f'(x) = \frac{-1}{x^2} < 0,$
$por\, lo\, cual\, f\, es\, decreciente, para\, todo\, x \geq 1$

ii) $\lim_{x \to \infty} 1/x = 0$

¿Qué puedo concluir?

Hallar el campo de convergencia de las series:

2512. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}}$.

Solución:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln x}}, n \geq 1$$

$$\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to \infty} \left| \frac{\frac{1}{(n+1)^{\ln x}}}{\frac{1}{n^{\ln x}}} \right| = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\ln x}} = L$$

$$-\ln x * \lim_{n \to \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{\square} = \ln L$$

$0 ¿ \ln L$

$L = 1$

No puedo dilucidar el carácter de la serie con este criterio.

Por el criterio de la raíz:

$$a_n = \frac{(-1)^{n+1}}{n^{\ln x}}, n \geq 1$$

$$\lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\sqrt[n]{\frac{1}{n^{\ln x}}}\right| = \lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n^{\left(\frac{\ln x}{n}\right)}}\right| = L$$

$$\ln M = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln n}{n} = ¿ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0 ¿$$

$M = 1, entonces L = 1$

No puedo dilucidar el carácter de la serie con este criterio.

Trabajemos con$¿ a_n \vee ¿$ y la serie p:

$$¿ a_n \vee ¿ \frac{1}{n^{\ln x}}, n \geq 1$$

La cual converge para $\ln(x) > 1$, esto es, $x > e$. Para analizar la convergencia de la serie p (o serie de Dirichlet) se usó el criterio de la integral, por ello la divergencia de la serie en valores absolutos no me dará información sobre la convergencia o divergencia de la alterna

Para $x = e$, se obtiene la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} la\, cual\, es$converge condicionalmente.

Hasta ahora, mi intervalo de convergencia está dado por $x \in ¿$.

Para el intervalo $x \in ¿ 0,1 ¿ la\, serie$ alterna es divergente.

Para el intervalo]1,e[, el $\ln(x) \in ¿ 0,1 ¿$, con lo cual la serie en valores absolutos es DIVERGENTE. Esto no me ayuda a dilucidar la naturaleza de la serie ALTERNA para esos valores de x (pues se ha empleado un criterio diferente al de la razón o al de la raíz para determinar la divergencia).

Apliquemos Leibniz para el intervalo x in]1,e[($\ln(x) \in ¿ 0,1 ¿$)

i) $|a_n| = f(n) = \frac{1}{n^{\ln x}}, entonces f'(n) = \frac{-\ln x}{n^{\ln(x)+1}}$<0, por tanto f es decreciente.

ii) $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{\ln x}} = 0$

Vemos que se cumplen las 2 condiciones para aplicar Leibniz, por tanto,

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^{\ln x}} \, .$$

Es CONVERGENTE.

Conclusión:

El intervalo de convergencia está dado por $x \in ¿ 1, \infty ¿$.

Para el intervalo $x \in ¿ 0,1 ¿$ la serie alterna es divergente.